Développement : Calcul des intégrales de Fresnel.

RM

2022-2023

Référence :

1. 131 dev pour l'agreg

Énoncé :

Nous avons les résultats suivants pour les intégrales de Fresnel :

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Énoncé/plan du livre :

1. On montre que $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}du$ et $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi s^2}ds$ convergent.
2. Pour $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ la fonction périodique vérifiant :
$$\forall x \in [0,1[, f(x) = e^{2i\pi x^2}.$$
On montre que f est somme de sa série de Fourrier et que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, son n-ième coefficients de Fourier est
$$c_n(f) = e^{i\pi\frac{n^2}{2}} \int_{-n/2}^{-n/2+1} e^{2i\pi s^2}ds.$$
3. On calcul J, et on conclut.

Résolution :

1. Démontrons la convergence de l'intégrale I. La fonction $u \mapsto e^{iu}u^{-1/2}$ étant continue sur $]0,+\infty[$, il s'agit de montrer que la fonction est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.
Pour $u \in]0,1]$, on a la majoration suivante
$$\left|\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{u}}$$
Or comme $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $]0,1]$, c'est bine intégrable.
Considérons $A \geq 1$. Grâce à une i.p.p, on obtient
$$\int_1^A \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}du = \frac{e^{iA}}{i\sqrt{A}} - \frac{e^i}{i} + \frac{1}{2i}\int_1^A \frac{e^{iu}}{u^{3/2}}du.$$
Or $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{e^{iA}}{i\sqrt{A}} = 0$ et la fonction $u \mapsto \frac{e^{iu}}{u^{3/2}}$ majorée par $u \mapsto u^{-3/2}$ intégrable sur $[1,+\infty[$, donc $u \mapsto \frac{e^{iu}}{u^{3/2}}$ l'est aussi. On a donc que la limite lorsque A tends vers l'infinie de notre intégrable converge. Elle est donc intégrable sur $]0,+\infty[$ et donc l'intégrale I converge.

Pour démontrer la convergence de J, on va utiliser le changement de variable $u = 2\pi s^2$ qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{2i\pi s^2} ds$ est de même nature que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{u}} du = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} I.$$

qui converge. Ainsi, $\int_0^{+\infty} e^{2i\pi s^2} ds$ converge et par parité de la fonction $x \mapsto e^{2i\pi x^2}$, J converge également.

2. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème de dirichlet nous assure que la série de Fourrier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.
Calculons les coefficients de Fourier de f. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \int_0^1 e^{2i\pi x^2} e^{-2i\pi n x} dx \\ &= \int_0^1 e^{2i\pi(x^2 - nx)} dx \\ &= \int_0^1 e^{2i\pi((x-n/2)^2 - n^2/4)} dx \\ &= e^{-i\pi n^2/2} \int_0^1 e^{2i\pi(x-n/2)^2} dx \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable affine $s = x - n/2$ dans la dernière intégrable et on obtient bien

$$c_n(f) = e^{i\pi \frac{n^2}{2}} \int_{-n/2}^{-n/2+1} e^{2i\pi s^2} ds.$$

3. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_{2k}(f) = \int_{-k}^{-k+1} e^{2i\pi s^2} ds$$

d'après la question précédente. Comme l'intégrale J converge, la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{2k}(f)$ converge également et on a :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{2k}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-k}^{-k+1} e^{2i\pi s^2} ds = J.$$

Par ailleurs, f est la somme de sa série de Fourier, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{2i\pi n x}.$$

En évaluant cette égalité en $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$, on obtient

$$f(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \qquad \text{et} \qquad f(\frac{1}{2}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)(-1)^n.$$

On en déduit que

$$J = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{2k}(f) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)(1 + (-1)^n) = \frac{f(0) + f(1/2)}{2}$$

soit

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi s^2} ds = \frac{1+i}{2}.$$

Par identification des partie réelles et imaginaires avec les parité des fonctions $t \mapsto \sin(t^2)$ et $t \mapsto \cos(t^2)$, on trouve

$$\int_0^{+\infty} \sin(2\pi s^2) ds = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \cos(2\pi s^2) ds = \frac{1}{4}.$$

Pour finir, il suffit de réaliser le changement de variable linéaire $t = \sqrt{2\pi} s$, qui nous permet de finalement établir

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$